Ciencias de la Computación I

Autómatas de Pila y Lenguajes Libres del Contexto

Motivación

-¿Es posible diseñar un AF que reconozca el lenguaje L_1?

$L_1 = \{ a^n b^n / n > 0 \}$

-¿Es posible diseñar un AF que reconozca el lenguaje L_2?

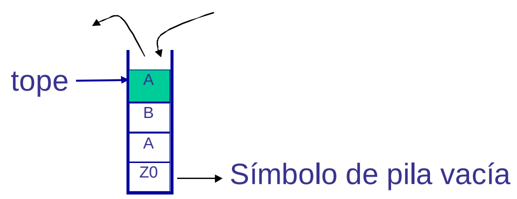
$L_2 = \{ x / x \in \{ (,) \}^*$ y x es una cadena con paréntesis balanceados $\}$

(((( )))) ( ) ((   ))

Autómatas de Pila

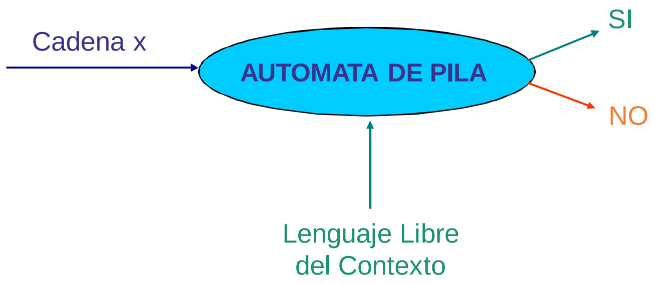
Es necesario agregar algo a los AF para incrementar
su poder computacional

Memoria auxiliar que funciona como una Pila



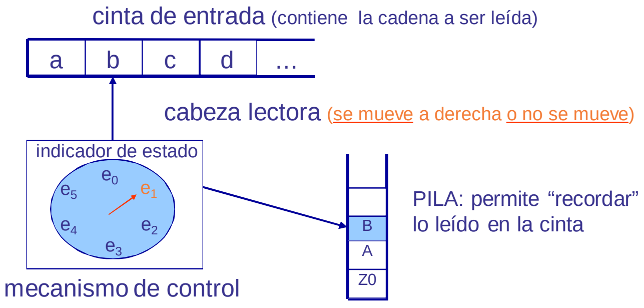
Autómatas de Pila

Dado un lenguaje L, libre del contexto, definido sobre un alfabeto A y una cadena x arbitraria, determinar si $x \in L$ o $x \notin L$.



- Dos puntos de vista:
  - Como dispositivo **reconocedor** de la pertenencia de una cadena a un lenguaje libre del contexto.
  - Como **traductor** de una cadena en otra.

Autómatas de Pila Reconocedores



Estados del AP:

- ✓ Cantidad finita.
- ✓ Un estado inicial.
- ✓ Al menos un estado final o de aceptación.

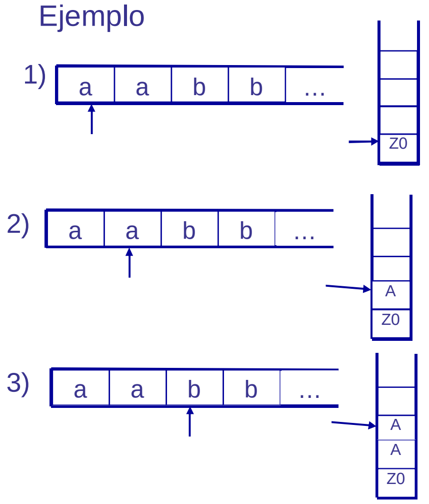
Dada una cadena x en la cinta de entrada, si el AP lee toda la cadena y:

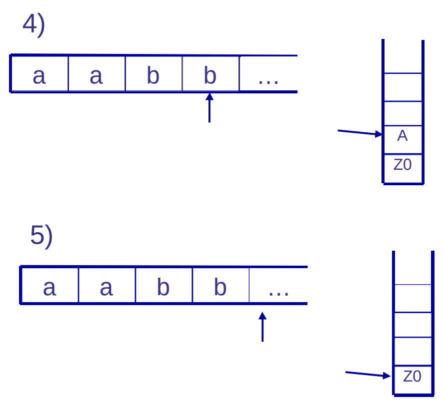
- ➢ **termina en un estado final → cadena aceptada**
- ➢ **termina en un estado no final → cadena rechazada**

Uso de la pila

$L_1 = \{ a^n b^n / n > 0 \}$

Ejemplo





Si la cantidad de a´s es igual a la cantidad de b´s se llega al final de la cadena con Z_0 en la pila

Autómatas de Pila Reconocedores

Formalmente, un AP reconocedor determinístico (APD) se define como una 7-upla

$$APD = \langle E, A, P, \delta, e_i, F, Z_0 \rangle$$

- ✓ E es un conjunto finito de estados; $E \neq \emptyset$
- ✓ A es el alfabeto de entrada
- ✓ P es el alfabeto de la pila

$A \cap P = \emptyset$

- ✓ δ es la función de transición de estados

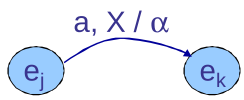
  $\delta: E \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times P \rightarrow E \times P^*$
- ✓ e_i es el estado inicial; $e_i \in E$
- ✓ F es el conjunto de estados finales o de aceptación; $F \subseteq E$
- ✓ Z_0 símbolo distinguido de la Pila $Z_0 \in P$

Autómatas de Pila Reconocedores

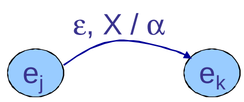
- ✓ δ es la función de transición de estados

  $\delta: E \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times P \rightarrow E \times P^*$

1) $\delta(e_i, a, X) = (e_k, \alpha)$



2) $\delta(e_i, \varepsilon, X) = (e_k, \alpha)$



donde $a \in A; X \in P; \alpha \in P^*$; $e_i, e_k \in E$

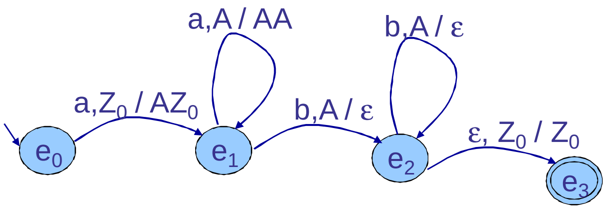
<u>Importante</u>:
Si existe transición de tipo (2), sólo se garantiza que AP es determinístico si

$\forall s: s \in A, \delta(e_i, s, X)$ no está definida

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA – 2017

Ejemplo

$L = \{ a^n b^n / n > 0 \}$

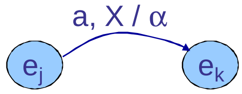


$APD = <\{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a,b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\}>$

Autómatas de Pila Reconocedores

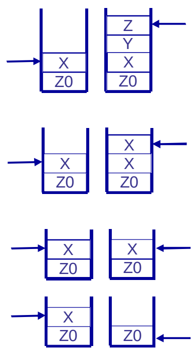
Transiciones de tipo (1)

$\delta(e_j , a, X) = (e_k, \alpha)$



Acción sobre la Pila
Nuevo estado
Tope de la Pila
Símbolo por leer en cinta de entrada
Estado actual

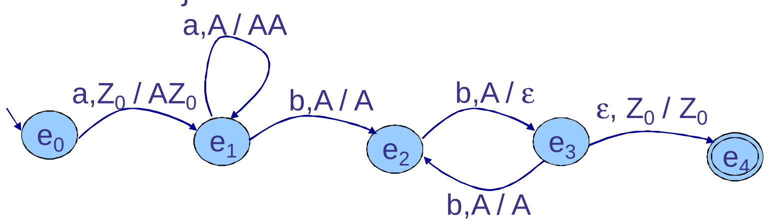
Ejemplo
Antes Después



Si $\alpha = ZYX$	deja X, apila Y, apila Z	(Nuevo tope Z)
Si $\alpha = XX$	deja X, apila X	(Nuevo tope X)
Si $\alpha = X$	deja X	(No altera la Pila)
Si $\alpha = \varepsilon$	elimina X	(Desapila)

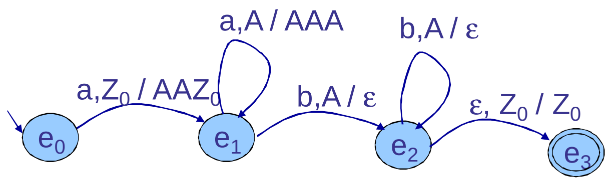
Ejemplos

$L = \{ a^n b^{2n} / n > 0 \}$



$APD=<\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4\}, \{a,b\}, \{A,Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_4\}>$

<u>Otra forma</u>



$APD=<\{e_0,e_1,e_2,e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\}>$

Autómatas de Pila Reconocedores

<u>Descripción instantánea</u>

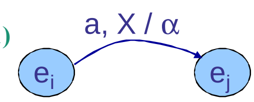
estado actual
a símbolo a leer, ω resto cadena cinta
X tope, β cadena debajo tope

Una **configuración** de un AP es una tripla $<e_i\ ,a\omega\ ,x\beta>$ donde

Luego, se define una relación de transición $\vdash$

$$< e_i, a\omega, X\beta > \vdash^{(1)} < e_j, \omega, \alpha\beta >$$

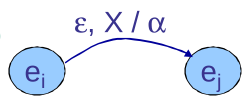
(1)



con (1) <u>lee el símbolo a</u> y <u>reemplaza el tope X por α</u>

$$< e_i, a\omega, X\beta > \vdash^{(2)} < e_j, a\omega, \alpha\beta >$$

(2)



con (2), <u>no lee el símbolo a</u> y <u>reemplaza el tope X por α</u>

donde $a \in A$; $\omega \in A^*$; $X \in P$; $\alpha, \beta \in P^*$; $e_i, e_j \in E$

Autómatas de Pila Reconocedores

Cadena aceptada por AP

Una cadena $\omega \in A^*$ es aceptada por AP = $<E, A, P, \delta, e_0, Z_0, F>$ sí y sólo sí

$$< e_0, \omega, Z_0 > \vdash^{*} < e_f, \varepsilon, \alpha >$$

Si el AP comienza en el estado e_0, con pila vacía Z_0, y luego de varias transiciones, se leen todos los símbolos de la cadena, y llega a un estado $e_f \in F$, la cadena es aceptada. En la pila puede quedar cualquier cadena $\alpha \in P^*$

Luego, el lenguaje aceptado por el autómata de pila AP es:

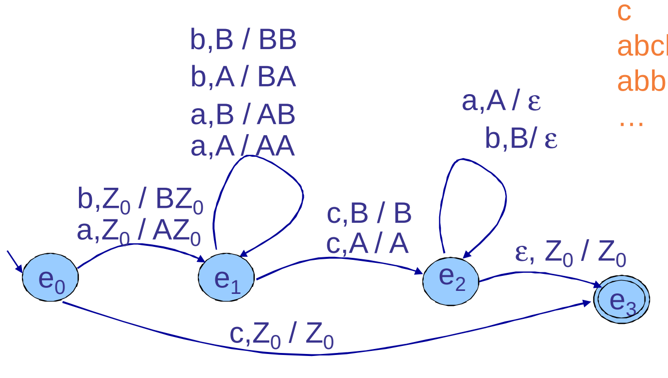
$$L(AP) = \{ \omega \,/ < e_0, \omega, Z_0 > \vdash^{*} < e_f, \varepsilon, \alpha > y\ \omega \in A^* \ y\ e_f \in F\ y\ \alpha \in P^* \}$$

Los lenguajes aceptados por los **Autómatas de Pila** se denominan **Lenguajes Libres (Independientes) del Contexto** o de **Tipo 2**.

Ejemplo: Lenguaje libre del contexto determinístico

$L = \{ w\, c\, w^R \,/\, w \in \{a,b\}^* \}$

Ejemplos de cadenas
c
abcba
abbcbba
…



$$APD=<\{e_0,e_1,e_2,e_3\}, \{a,b,c\}, \{A,B, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\}>$$

Ejemplo: Lenguaje libre del contexto no determinístico

$L = \{ w\, w^R \ / \ w \in \{a,b\}^* \}$

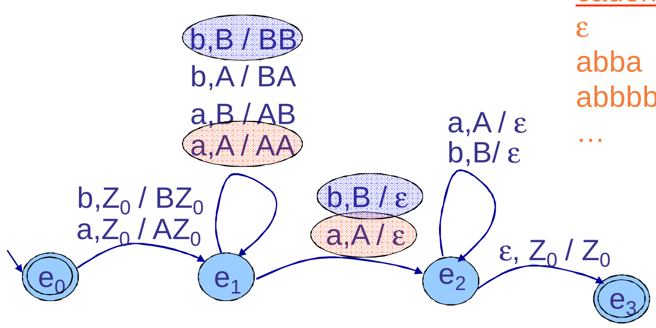
Ejemplos de cadenas

ε

abba

abbbba

…



APND = $<\{e_0,e_1,e_2,e_3\}, \{a, b\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_0, e_3\}>$

Para este lenguaje no existe una solución con AP determinístico

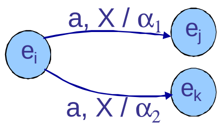
Autómata de Pila de No Determinístico

APND= $<E, A, P, \delta, e_0, Z_0, F>$, siendo δ no determinística definida como:

$\delta: E \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times P \rightarrow P_f(E \times P^*)$ P_f denota los subconjuntos finitos de $E \times P^*$

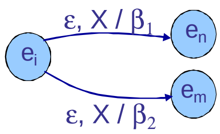
CASOS DE NO DETERMINISMO

1) $\delta(e_i, a, X) = \{(e_j, \alpha_1), (e_k, \alpha_2), \ldots \}$



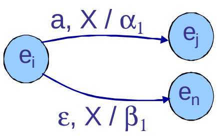
Si lee a, con tope X dos caminos

2) $\delta(e_i, \varepsilon, X) = \{(e_n, \beta_1), (e_m, \beta_2), \ldots \}$



Si no lee cinta con tope X dos caminos

3) Combinadas (1) y (2)

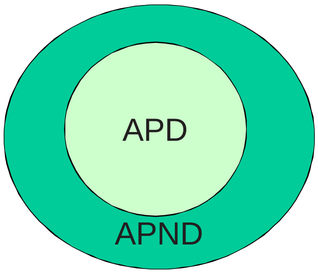


Si lee a, y tope X un camino
Si no lee a, y tope X otro camino

donde $a \in A$, $X \in P$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in P^*$ y $e_i, e_j, e_k, e_n, e_m \in E$

Autómatas de Pila

Teorema:
Los APND tienen mayor poder de reconocimiento que los APD. Es decir, hay lenguajes libres del contexto que pueden ser reconocidos por un APND pero no por un APD.

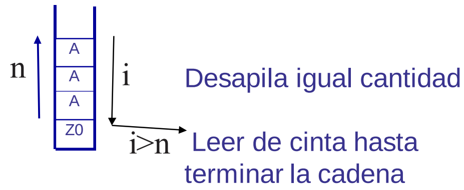


Análisis del Lenguaje

- Si el lenguaje es libre del contexto no determinístico hacer APND
- Si el lenguaje es libre del contexto determinístico hacer APD (fijarse si agregaron transiciones que generan no determinismo y corregirlas)

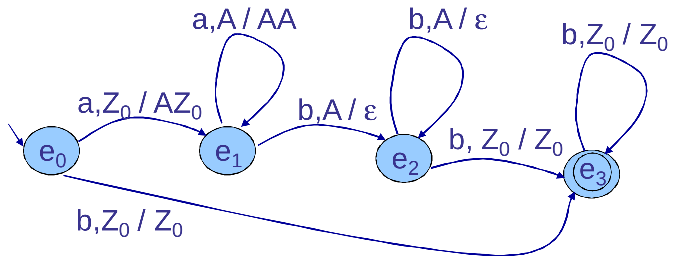
Uso de la pila (CASO MENOR n < i)

L = { $a^n b^i$ / n ≥ 0 y n < i}



<u>Ej. de cadenas</u>
bbb
aabbb
abb
…

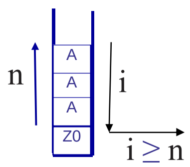
δ:



APD = $<\{e_0,e_1,e_2,e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\}>$

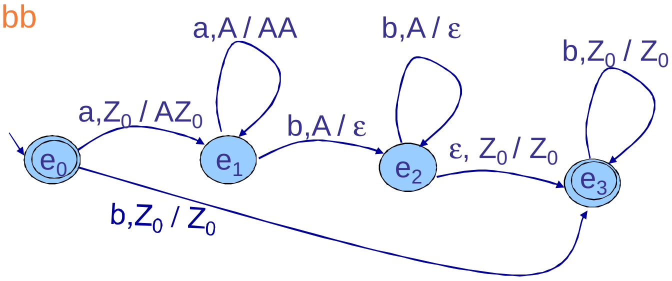
Uso de la pila (CASO MENOR IGUAL n ≤ i)

L = { $a^n b^i$ / n≥0 y n ≤ i}



<u>Ej. de cadenas</u>
ε
bbbb
aabb
aabbb
…

δ:

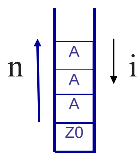


APD = $<\{e_0,e_1,e_2,e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_0, e_3\}>$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA – 2017

Uso de la pila (CASO MAYOR n>i)

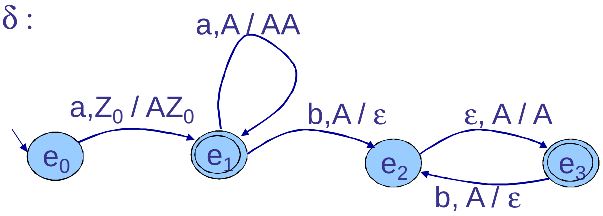
$L = \{ a^n b^i / i \geq 0 \text{ y } n > i \}$



Si n>i tiene que llegar a leer toda la cadena y quedar A´s en la pila

Ej. de cadenas
a
aaaa
aaabb
aaaab
…

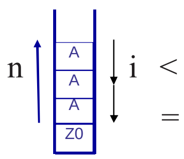
δ :



APD = $<\{e_0,e_1,e_2,e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_1, e_3\}>$

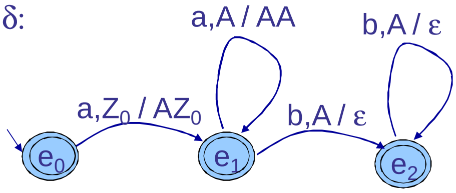
Uso de la pila (CASO MAYOR IGUAL $n \geq i$)

$L = \{ a^n b^i / i \geq 0 \text{ y } n \geq i \}$



Ej. de cadenas
ε
aaa
aab
aabb
aaaabb
…

δ:



APD = $<\{e_0,e_1,e_2\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_0, e_1, e_2\}>$

Autómatas de Pila Traductores

Formalmente, un AP traductor (APT) se define como una 9-tupla

$$AP_T = \langle E, A, P, \delta, e_i, F, Z_0, \gamma, S \rangle$$

donde E, *A* , *P,* δ, e_0, Z_0, F se definen como antes y se agregan dos componentes

✓ S es el alfabeto de salida

✓ γ es la función de traducción; $\gamma : E \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times P \rightarrow S^*$

γ está definida siempre que δ está definida.

Si existe $\delta(e_j, a, X) = (e_k, \alpha)$ y además $\gamma(e_j, a, X) = t$

donde $e_j, e_k \in E$; $a \in A$; $X \in P$; $\alpha \in P^*$; $t \in S^*$

$$e_j \xrightarrow{a,\ X\ /\ \alpha,\ t} e_k$$

Autómatas de Pila Traductores

Función de traducción para cadenas

El autómata sólo define la traducción, si el autómata AP subyacente "acepta" la cadena.

Es decir, la traducción $T(\omega)$: $A^* \rightarrow S^*$ asociada a AP_T está definida como:

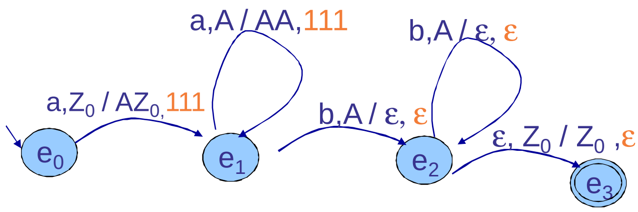
$$T(\omega) \text{ es válida } \Leftrightarrow \langle e_0, \omega, Z_0 \rangle \overset{*}{\vdash} \langle e_f, \varepsilon, \alpha \rangle \text{ donde } \omega \in A^*$$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA – 2017

Ejemplo

Traducir las cadenas $a^n\, b^n$ como 1^{3n}

$L = \{ a^{\mathbf{n}}\, b^{\mathbf{n}} / n > 0 \}$



$AP = <\{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a,b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\}, \gamma, \{1\}>$